

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \exp(-\frac{1}{x})$ si $x > 0$, et $f(x) = 0$ si $x \leq 0$.

- (1) Est-ce que f est continue en 0? Est-elle différentiable à droite en 0? Est-elle différentiable à gauche en 0?
- (2) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, il existe un polynôme $P_n(x)$ tel que $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} \exp(-\frac{1}{x})$, et trouver une relation de récurrence entre les polynômes P_n .
- (3) Montrer que f est de classe C^∞ , c'est-à-dire que f admet des dérivées de tous ordres. Peut-elle être exprimée par une série $f(x) = \sum b_n x^n$ de rayon de convergence strictement positif au voisinage de 0?
- (4) Montrer qu'il existe une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec les propriétés suivantes :
 - g est de classe C^∞ ,
 - $g(x) = 0$ si $|x| \geq 1$,
 - $g(x) > 0$ si $|x| < 1$.

Exercice 2

Soit n un nombre entier strictement positif. On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes réels de degré $\leq n$ à une variable, et on munit E du produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

On note $\|P\|$ la norme de $P \in E$. On rappelle que l'on a $\|P\|^2 = \langle P, P \rangle$.

Notons $F \subset E$ le sous-espace engendré par $X, X^2, \dots, X^n$. On cherche à déterminer la distance $d = d(1, F)$, qui est par définition, l'infimum de $\|1 - P\|$ pour P dans F :

$$d(1, F) = \inf\{\|1 - P\| \mid P \in F\}.$$

On pose

$$S(X) = \frac{(X-1)\dots(X-n)}{(X+1)\dots(X+n+1)}.$$

La décomposition en éléments simples de S s'écrit

$$S(X) = \frac{a_0}{x+1} + \dots + \frac{a_n}{X+n+1},$$

où $a_0, \dots, a_n$ sont des nombres réels.

- (1) Calculer a_0 .
- (2) Montrer que le polynôme

$$T(X) = a_n X^n + \dots + a_0$$

est orthogonal à F , c'est-à-dire, $\langle T, P \rangle = 0$ pour tout $P \in F$.

- (3) Décrire $F^\perp$, l'ensemble des polynômes orthogonaux à F .
- (4) Montrer que $d^2 = \frac{1}{a_0^2} \|T\|^2$.
- (5) Calculer d .

Exercice 3

Une partition d'un entier positif $n \geq 1$ est une suite finie et décroissante d'entiers $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_s > 0$, dits les termes de la partition, telle que $a_1 + \dots + a_s = n$. On note $p(n)$ le nombre de partitions de n . Par exemple, les partitions de 3 sont (3); (2, 1); (1, 1, 1), et $p(3) = 3$.

- (1) Donner les partitions de 4 and 5, ainsi que $p(4)$ et $p(5)$.
- (2) Montrer que $p(n)$ est aussi le nombre de suites $(x_k)_{k \geq 1}$ où pour tout $k \geq 1$, x_k est un entier positif ou nul, et telles que $\sum_{k=1}^{\infty} kx_k = n$.
- (3) Soit t un nombre réel tel que $0 < t < 1$. Montrer que la suite $u_1, u_2, \dots$ dont le m -ième terme est défini par

$$\forall m \geq 1, \quad u_m := \prod_{k=1}^m \frac{1}{1-t^k}$$

est strictement croissante et convergente.

On note $f(t) := \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-t^k}$.

- (4) Montrer que $f(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n)t^n$.

Soient maintenant $s, m \geq 1$ deux entiers positifs. Pour un nombre entier $n \geq 1$, on note $q_{s,m}(n)$ le nombre de partitions de n en la somme de s termes distincts telles que le maximum des termes est égale à m . Autrement dit, $q_{s,m}$ est le nombre de partitions de n de la forme $(a_1, a_2, \dots, a_s)$ avec $a_1 = m > a_2 > \dots > a_s$. Par exemple, $q_{1,3}(3) = q_{2,4}(6) = 1$.

On note $q(n) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} q_{s,m}(n)$ le nombre de partitions de n en la somme des termes distincts.

- (5) Quelles sont les valeurs de $q(7)$ et $q(8)$?
- (6) Montrer que $q_{s,m}(n)$ est aussi le nombre de partitions de n de la forme $(b_1, \dots, b_m)$ (i.e. en la somme de m termes) avec $b_1 = s$ et telles que chaque entier $1 \leq k \leq s$ apparaît au moins une fois parmi les termes $b_1, b_2, \dots, b_m$.
- (7) En déduire que $q(n)$ est aussi le nombre de partitions de n telles que si un entier $k \geq 2$ apparaît parmi les termes, alors $k-1$ apparaît aussi.
- (8) Prouver que $q(n)$ est aussi le nombre de partitions de n dont les termes sont tous des nombres entiers impairs.